◇◇◇◇ 第7章 練習問題 ◇◇◇◇

7.1 〈線形演算と分散〉 次の分散の式を説明せよ．

i) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

ii) $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

7.2 〈ポートフォリオ〉 二つの確率変数 R_1, R_2 があり，$E(R_1)=e_1$, $V(R_1)=\sigma_1{}^2$, $E(R_2)=e_2$, $V(R_2)=\sigma_2{}^2$, R_1, R_2 の相関係数を ρ とする．$0\leqq x\leqq 1$ に対して，確率変数

$$R_p=xR_1+(1-x)R_2$$

を定義する．

i) R_p の期待値 $E(R_p)$，分散 $V(R_p)$ を求めよ．

ii) $V(R_p)$ の最小値を求めよ．

iii) $e_1=0.198$, $\sigma_1=0.357$, $e_2=0.055$, $\sigma_2=0.203$, $\rho=0.18$ のとき，$E(R_p)$, $V(R_p)$ を x の関数としてグラフにせよ．

（注） R_1, R_2 が2種類の有価証券（とくに株式）の変動利回りとすると，R_p は両証券の額 $x:1-x$ の組合せ（ポートフォリオ）の利回りを表わしている．データはポートフォリオ理論の創始者マルコウィッツによる，アチソン・トペカ・サンタフェ鉄道会社，コカ・コーラ社に対する計算結果から引用した．

7.3 〈独立と無相関〉 二つのつぼ A, B の中に3個のボールを投げ入れる．つぼ A の中に入ったボールの数を X，ボールの入っているつぼの数を Y とするとき，X, Y の同時確率分布を求めて，X, Y とは無相関であるが，独立ではないことを示せ．

7.4 〈秤量問題〉 二つの物体 A, B の重さ $m_{\mathrm{A}}, m_{\mathrm{B}}$ を測りたい．A, B それぞれを天秤の片側に載せて測る方法(I)と，まず一方に A, B 両方を載せて重さの和を測りまた天秤の両側に載せて差を測りそこから算出する方法(II)がある．I, II のどちらがすぐれた方法か．ただし，天秤の測定誤差の分散はつねに σ^2 とする．

7.5 〈相関係数の線形不変性〉 $U=aX+b$, $V=cY+d$ （ただし $ac>0$）のとき，$\rho_{UV}=\rho_{XY}$ を証明せよ．

7.6 〈2次元正規確率変数の生成〉 X, Y は独立で，ともに標準正規分布 N(0, 1) に従う確率変数とする．

i) 定数 c を適当に選んで $X, cX+Y$ の相関係数が 0.5 となるようにせよ．

ii) 同じく，一般に ρ となるようにせよ．

iii) X, Y から，与えられた2次元正規分布 $\mathrm{N}((0,0), (\sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, \rho))$ に従う2次元確率変数 U, V を作れ．

7.7 〈システムの直列と並列〉 システム S_1, S_2 の寿命 X_1, X_2 は確率変数であって，独立で，指数分布 $Ex(\lambda)$ に従っている．

i) S_1, S_2 が並列に結合されている全体システムの寿命 Y の確率分布を求めよ．

ii) 同じく，直列の場合はどうか．

（ヒント） まず，Y の累積分布関数を求めよ．

7.8 〈極値統計学〉 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立で，同一の確率分布に従っている．その密度関数を $f(x)$，累積分布関数を $F(x)$ とする．最大値，最小値

$$U=\mathrm{Max}(X_1, X_2, \cdots, X_n), \qquad V=\mathrm{Min}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

のそれぞれの累積分布関数および密度関数を

i) $f(x)$ が $[0, 1]$ 上の一様分布の場合

ii) $f(x)$ が指数分布 $Ex(\lambda)$ の場合

iii) $f(x)$ が一般の連続分布の場合

のそれぞれの場合にたいして求めよ．これら極値を扱う極値統計学は，レコード値（記録値），安全性の分析によく用いられる．

7.9 〈たたみこみの計算〉 たたみこみの直接計算によって，二項分布，ポアソン分布，正規分布の再生性を証明せよ．すなわち，X_1, X_2 が独立で，

i) p が等しい二項分布に従うならば，X_1+X_2 も二項分布に従う

ii) ポアソン分布に従うならば，X_1+X_2 もポアソン分布に従う

iii) 正規分布に従うならば，X_1+X_2 も正規分布に従う

ことを証明せよ．