１０章　熱方程式による公式の導出

10-3 ブラック＝ショールズの公式

さて，式（10.2.8）で導いたブラック＝ショールズ方程式を解くと，以下の結果となる：

$$C(S(t), t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

ここで,

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

〔Φ(x) は標準正規分布の累積分布関数を示す〕

これを熱方程式の文脈で解釈し、導出することにする。

まず式（10.2.8）を $f(x,t)$ で書き直し、

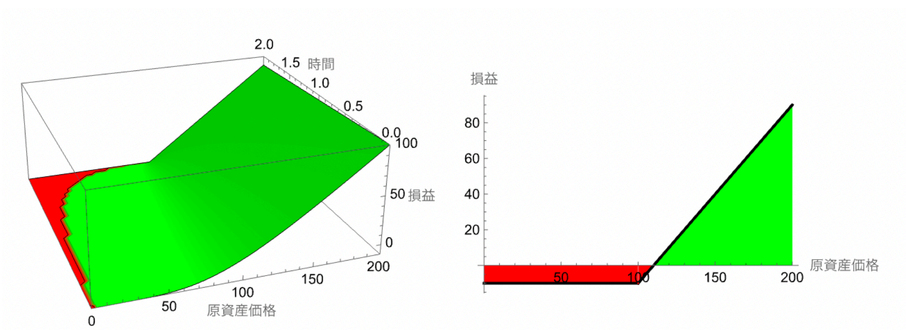
$$\mu f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 x^2 + \mu\frac{\partial f}{\partial x}x$$

とする。また、期末時点 T として、

$$f(x,t) = e^{(t-T)}u(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

とする。関数 f のイメージは、下の図を参照されたい。



ここでさらに式（10.2.2）時間方向を変え、時刻Tを$s=0$として逆に見ると

$$f(x,t)=e^{(t-T)}u(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mu x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

さらに

$$\begin{aligned}s&=T-t\\ y&=\log\frac{x}{K}+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)=\log\frac{x}{K}+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})s\\ v(y,s)&=u(x,t)\end{aligned}$$

これは、yは原資産価格xを行使価格Kで割って対数を取り、さらに補正項$\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$を加えたものである。この補正項は、原資産価格の平均的な成長率を表す部分を考慮したものである。（fの変化をlogで縮めてみたもので、原資産価格xは、基本的には利率μで指数的に伸びていくという部分を持つ）

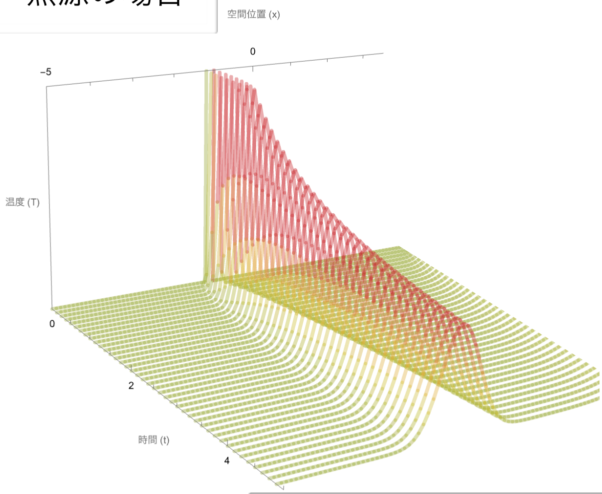
この変換の結果、方程式は次のように変化する：

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

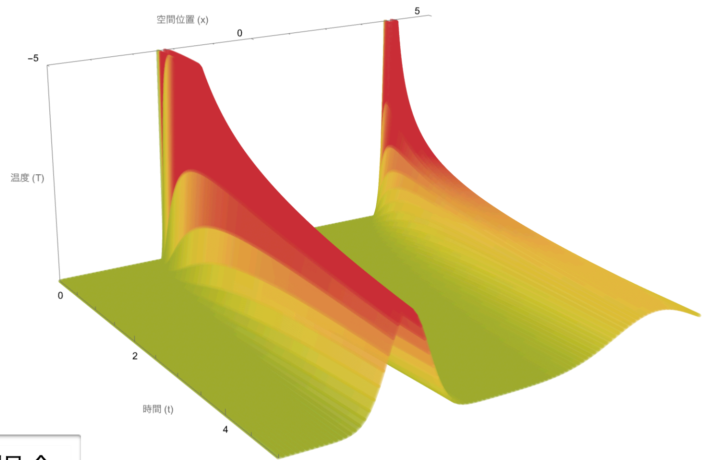
これは、熱伝導の方程式である。ここで、熱伝導方程式のいろいろな境界条件のもとでの解を、視覚的に示す。

一次元熱伝導モデルとして、細長い均質な棒における熱の伝わり方を考える。この棒の初期温度分布を与え、それが時間とともに棒の他の部分に伝導していく様子を観察したい。以下の図では慣例に従って、時間をt、棒に沿った位置をxとし、指定した時間における温度分布（解）を表示していく。

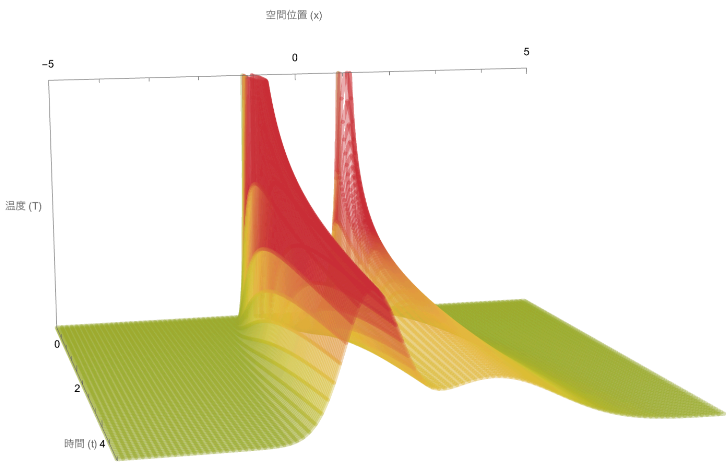
一熱源の場合



二熱源が干渉しない場合



二熱源が干渉し合う場合



この様子を、簡単に数式で見ていこう。まず、最初の（時間0 での）温度分布（初期条件）を金属棒の全体にわたって与えることが必要である。それを次のように与えるとする：

$$u(0,x) = b(x)$$

次に、 $u(t,x)$ の形を時間 t からなる部分 $T(t)$ と、針金の位置 x からなる部分 $X(x)$ の2 つの合成であると考える（変数分離）。

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

すると、熱伝導方程式は、次のようになる：

$$T'(t)X(x) = kT(t)X''(x)$$
$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

上の式の左辺は t だけの式、右辺は x だけの等式なので、ある定数に等しいはずである。さらにその定数は＋なら式の値は無限に増えていき、現実的な意味をなさないので、定数はあるマイナスの値 $-\lambda^2$ に等しいことがわかる：

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

この式を展開すると、以下のようになる：

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -k\lambda^2$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

第1 の式は、 T が指数関数であることを表し、第2 の式は X が sin , cos の周期関数であることを意味する。そこで求める u は、

$$u(t,x) = e^{-k\lambda^2 t}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)$$

という形になり、この形式を持つものはすべて解となり得るので、これらをすべて重ね合わせたものが方程式解（積分を使った完全解）となる：

$$u(t,x)=\int_0^\infty e^{-k\lambda^2 t}\left(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right)d\lambda$$

$A(\lambda)$，$B(\lambda)$ は初期条件に合うように定める。このとき初期条件とは、$t=0$ での温度分布で、次が成り立つ：

$$u(0,x)=b(x)=\int_0^\infty\{A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\}\,d\lambda$$

ここで、$b(x)$ はフーリエ級数展開に対応しているため、フーリエ級数の性質から、次のように $\cos\lambda x$ と $\sin\lambda x$ のフーリエ成分に分解できる：

$$A(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty b(x)\cos(\lambda x)dx$$

$$B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty b(x)\sin(\lambda x)dx$$

これに基づいて、熱方程式の一般解は次の形となる：

$$u(t,x)=\int_0^\infty e^{-k\lambda^2 t}\left(A(\lambda)\cos(\lambda x)+B(\lambda)\sin(\lambda x)\right)d\lambda$$

そして、初期条件 $b(x)$ の完全解は次のように表される：

$$u(t,x)=\int_0^\infty e^{-k\lambda^2 t}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty b(\xi)\cos(\lambda\xi)d\xi\cos(\lambda x)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty b(\xi)\sin(\lambda\xi)d\xi\sin(\lambda x)\right)d\lambda$$

ただし、

ξ : 空間変数。初期条件が定義されている空間内の位置を示す。

λ :フーリエ変数。初期条件をフーリエ変換した際の周波数成分。

k : 熱拡散係数。熱伝導の速さや広がり方を示す。

$A(\lambda), B(\lambda)$: $b(\xi)$ をフーリエ変換した際に得られるフーリエ係数。$\cos(\lambda x), \sin(\lambda x)$: 各フーリエ成分の基底関数。

さて、式（10.3.1）において、行使価格を表す境界条件が、時間 $s = 0$ で次のようになっている：

$$\{Ke^y - K\}^+$$

ただし、$\{a\}^+$は、中身が正の値であればそのまま，負の値であれば 0 とする記号である．すると式（10.3.1）の解は、境界条件を

$$b(y) = \nu(y,0) = \{K(e^y - 1)\}^+$$

として、次のように解ける。（偏微分の方程式解）

$$v(y,s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-y}{\sigma\sqrt{s}}\right)^2} b(w)dw$$

これは、境界条件の各点にある熱素からの正規分布に従う影響の積分を表す。$v(y,s)$ は、時間s での点yの値（温度に相当）を表す。ここでさらに次のように変数変換を行う：

$$z = \frac{w-y}{\sigma\sqrt{s}}, \quad w = \sigma\sqrt{s}z + y, \quad dw = \sigma\sqrt{s}dz$$

これにより、境界条件は次のように変換される。

境界条件：

$$b(w) = \begin{cases} K(e^{y+\sigma\sqrt{s}z} - 1), & z \geq -\frac{y}{\sigma\sqrt{s}} \\ 0, & z < -\frac{y}{\sigma\sqrt{s}} \end{cases}$$

そして、変数変換後の解の形は次のようになる：

$$v(y,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{y}{\sigma\sqrt{s}}}^{\infty} K\left(e^{y+\sigma\sqrt{s}z} - 1\right) \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$$

これを計算すれば、次の解が得られる：

$$v(s,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y/\sigma\sqrt{s}}^{\infty}Ke^{y+\sigma\sqrt{s}z-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{s})^2},dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y/\sigma\sqrt{s}}^{\infty}Ke^{-z^2/2}dz$$

ここで

$$y=\log x/K+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s$$

$$e^{y+\frac{\sigma^2 s}{2}}=\frac{x}{K}e^{\mu s}$$

となるので、これを考慮すると

$$\nu(s,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y/\sigma\sqrt{s}}^{\infty}xe^{\mu s}e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{s})^2}dz=xe^{\mu s}\Phi\left(-\frac{y}{\sigma\sqrt{s}}-\sigma\sqrt{s}\right)$$

$$dz=K\Phi^c\left(-\frac{y}{\sigma\sqrt{s}}\right)$$

ここで、$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-z^2/2}dz,\ \Phi^c(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty}e^{-z^2/2}dz$

さらに変形を元に戻して整理すると、

$$\begin{aligned}f(x,t)&=e^{\mu(t-T)}v(s,y)\\&=e^{\mu s}\left\{xe^{\mu s}\Phi^c\left(\frac{-\log\frac{x}{K}+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s-\sigma\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{s}}\right)-K\Phi^c\left(\frac{-\log\frac{x}{K}+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\right\}\end{aligned}$$

これを整理すると、次のようになる：

$$f(x,t)=x\Phi^c\left(\frac{-\log\frac{x}{K}+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-e^{-\mu(T-t)}K\Phi^c\left(\frac{-\log\frac{x}{K}+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

実はこれが基本解となり、$t = 0$におけるfの値は、$x(0) = S$（原資産の初期価格）として、

$$f(x(0),0) = S\Phi^c\left(\frac{-\log\frac{S}{K} + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-\mu T}K\Phi^c\left(\frac{-\log\frac{S}{K} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

これを慣例に従い、次のように表記する：

$$f(x(0),0) = S\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-\mu T}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

まさにこれが、ヨーロピアン・コールオプション価格を求める際の、ブラック＝ショールズの公式となっている。