

ワンポイント練習の解答

- [1.1] 順列は $6^3=216$ 通り. うち $S=9$ には $6+6+3+3+6+1=25$ 通り, $S=10$ には $6+3+6+3+3=27$ 通りが属する. 等しくない. 正しい確率感覚が試される直間.
- [1.2] 幾何学的確率では面積割合を確率と見なす. 球面の面積 $=4\pi R^2$ (R =半径) であるから.

確率 $p=0.047/(5.15\times 10^8)\approx 9.1\times 10^{-11}$ 「極めて小さい」としては常識的値.

- [1.3] $P(A|B)$ は A の確率を述べており, したがって, (i) が正しい.
- [1.4] (i) は公式通り, あとは小さい事象から (iv), (iii), (ii) と進める.
 (i) $1-\{3(1/3)-3(1/9)+1/27\}=8/27$ (ii) $3\{(1/3)-2(2/27)-(1/27)\}=4/9$
 (iii) $3\{3(1/9)-(1/27)\}=2/9$ (iv) $1/27$

- [1.5] オッズを a 対 $10-a$ とし, $a\cdot 100+(10-a)(-130)=0$ から $a=5.65$. おおむね「5.5 対 4.5 ないしは 6 対 4 程度」が常識的で通じる.

- [2.1] Y の累積分布関数は, $0\leq y\leq 1$ の範囲で $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X/(X+1)\leq y)=P(X\leq y/(2-y))=y/(2-y)$ よって, Y の密度関数は, 微分から $g(y)=(y/(2-y))'=2/(2-y)^2$ ($0\leq y\leq 1$)

解説 確率変数の変数変換の密度関数を求める基本操作. 応用のためにも是非身につけておきたい.

- [2.2] これらの確率の和では $P(y=k)$ は k 回生じるから
 $P(X\geq 1)+P(X\geq 2)+P(X\geq 3)+P(X\geq 4)+P(X\geq 5)+P(X\geq 6)=E(X)$
 $\therefore$ 和をとって $E(X)=1+15/6=3.5$

- [2.3] チェビシェフの不等式からは, $P(|X-\mu|\geq 1.5\sigma)\leq 1/(1.5)^2\approx 0.444$
 実際の確率では, $\sigma=\sqrt{1/12}$, $1.5\sigma=0.433$ から範囲は $0.5\pm 0.433=0.061, 0.933$.
 $P(|X-\mu|>1.5\sigma)=(0.066-0)+(1-0.934)=0.067+0.067=0.134$
 (チェビシェフの不等式は, 具体的な分布に依存せず一般性を重視するため, 実際の確率より緩い上限を与える性質を持つ)

- [2.4] $\mu_1=0, \mu_2=1/3, \mu_3=0, \mu_4=1/5, \mu_5=0$ より $V(X)=1/3$, 対称性から歪度 $=0$, 尖度 $=\mu_4/(\mu_2)^2-3=(1/5)/(1/9)-3=1, 8-3=-1, 2$

- [2.5] (i) いない確率 $=(365\cdot 364\cdot 363\cdot 362)/365^4=0.9836$, いる確率 $=0.0164$
 (ii) $1-(12\cdot 11\cdot 10\cdot 9)/12^4=0.429$

[3.1]	Binom vs Po	Binom	Poisson
	5	0.10292	0.10082
	6	0.03676	0.05041
	7	0.00900	0.02160
	8	0.00145	0.00810
	9	0.00014	0.00270
	10	0.00001	0.00081

[3.2] X 社, Y 社の 10 日間の変化量に対して $\sigma_X=632.456$, $\sigma_Y=158.114$ (ドル) とし, $\rho=0.7$ とすると, 同様の計算から $\sigma_{X+Y}=751.665$ (ドル) と求められる. リスク基準として, 確率 99% 範囲を考えると $z_{0.01}=2.326$ であるから $751.665 \times 2.326 = 1748.373$ (ドル) がその限界である.

[3.3] (i) X の累積分布関数は, $U=e^{-2X}$ から $P(X \leq x) = P(U \geq e^{-2x}) = 1 - e^{-2x}$. ゆえに, 密度関数は, 微分して ($\lambda=2$ の指数分布)
(ii) $[0.1243, 0.6625, 3.0864, 1.3427, 0.1145, 0.2083, 1.4309, 0.0253, 0.5049, 0.0599]$

[3.4] $P(|X| > 5) = 5.733 \times 10^{-7}$, $P(|X| > 6) = 1.973 \times 10^{-9}$
宝くじの 1 等当選確率 (日本のジャンボ宝くじ) $\approx 1 \times 10^{-7}$ (大むね 4 万分の 1) とすると,
 $P(|X| > 5)$ は宝くじ 1 等当選確率よりやや高く,
 $P(|X| > 6)$ ははるかに低い.

[3.5] $E(X) = e^{\mu + (\sigma^2)/2} \approx 1.64872$ $Var(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2} \approx 4.67077$ $S(X) = (e^{\sigma^2} + 2)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \approx 6.185$

[4.1] $(x^6 + x^5 + \cdots + x)(x^4 + x^3 + x^2 + x)$ の係数より求める.

		1	1	1	1	1	1
				1	1	1	1
			1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	4	4	3	2
1							1

よって 17, 9, 8, ..., 3, 2 の確率は $1/12, 1/6, 1/4, 1/3, 1/3, 1/3, 1/4, 1/6, 1/12$.

期待値は $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = (7/2) + (5/2) = 6$

$V(X) = 35/12$ は 既 出, $V(Y) = 30/4 - (5/2)^2 = 5/4$, $V(X+Y) = (35/12) + (5/4) =$

$$50/12 = 4.167$$

$$[4.2] \quad \rho_{UV} = (ac + \rho(ad + bc) + bd) / (\sqrt{a^2 + b^2 + 2\rho ab} \sqrt{c^2 + d^2 + 2\rho cd})$$

[4.3] $AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$ より $aX_1 + bX_2$, $cX_1 + dX_2$ に対し E, V の公式を適用. 平均 $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 分散共分散行列 $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の 2 次元正規分布.

$$[4.4] \quad (i) \quad E(Y|X=1) = 1/3, \quad E(Y|X=-1) = -1/2, \quad V(Y|X=1) = 8/9, \quad V(Y|X=-1) = 3/4$$

$$(ii) \quad E(Y) = 2/15$$

[4.5] $P(X=i|Y=j) = P(Y=j|X=i) \cdot P(X=i) / P(Y=j)$ より
 $P(X=1|Y=1) = 4/5$, $P(X=-1|Y=1) = 1/5$, $P(X=1|Y=-1) = 2/5$, $P(X=-1|Y=-1) = 3/5$

[5.1] 回数 X は $N(6000(1/6), 6000(1/6)(5/6))$ にしたがうから, X を標準化して $(X - 1000) / \sqrt{6000(1/6)(5/6)}$ とすると, $X=990, 1010$ に対し標準化値 $= -0.3461, 3461$. 正規分布表あるいは NORM.INV からこの間の確率は 0.2710.

[5.2] $E(X_i) = 1/2$, $V(X_i) = 1/12$, $X_1, X_2, \dots, X_{12}$ は独立に一様分布に従い, 和 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_{12}$ は中心極限定理により正規分布 $N(6, 1)$ に従う. これを標準化すると, n 大のとき $Z = S_n - 6 \sim N(0, 1)$, 標準正規乱数の代用となる.

[5.3] $D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sqrt{n} \sigma$ ($\sqrt{\text{法則}}$ より) より $\sqrt{400} \cdot 8 = 160$, $160/60 = 2.6$ (人).

[5.4] 期待値 $= 1.5 + 0.2 + \cdots + 1.5 = 5.9$, 分散 $= (1.5)^2 + (0.2)^2 + \cdots + (1.5)^2 = 8.59$, 再生性から分布は正規分布.

[5.5] 分布は再生性から, $\lambda = 1 + 0.8 + 1.4 + 5 + 2.1 = 10.3$ のポアソン分布 $Po(10, 3)$.
Excel の POISSON より, 引数 0.0566 とすれば 0, 1, 2, ..., 5 の確率の計 $= 0.057$

[6.1] Excel の BINOM で $Bi(10, 3/5)$ を引き, $-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10$ に貼り付けると,

binom X	RW s	p(s)
0	-10	0.0001
1	-8	0.0016
2	-6	0.0106
3	-4	0.0425
4	-2	0.1115
5	0	0.2007
6	2	0.2508
7	4	0.2150
8	6	0.1209
9	8	0.0403
10	10	0.0060

[6.2] 近似式から, $1/\sqrt{5n}=0.252$, $2^{10}=1024$ を乗じて 258.36 (通り)

*正確には $63/256=0.246$, これより 252 (通り)

[6.3] $q/p=2/3$ より, 破産確率は $\{(2/3)^4-(2/3)^{10}\}/\{1-(2/3)^{10}\}=0.183$, ゲームの
価値 $=(-4)\cdot 0.183+6\cdot 0.817=4.166$

[6.4] 逆正弦法則より $P=\int_{0.8}^1 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})dx+\int_0^{0.1} 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})dx=0.295+$
 $0.205=0.5$

[6.5] (i) $X=X_1+X_2+\cdots+X_{100}$, $X_i\sim N(0, 1/100)$ ($i=1, 2, \dots, 100$)

(ii) $X=X_1+X_2+\cdots+X_{100}$, $X\sim Po(1/100)$ ($i=1, 2, \dots, 100$)

[7.1] $P(A_i)=1/2^i$ だから $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=1<\infty$ (有限) でボレル・カンテリの法則による.

[7.2] $E(X_i)=0$ より $E(X_i^2)=V(X_i)=1$. 大数の強法則より成立.

[7.3] 各カウント X_i は $B_i(n, p)$ に従うからその和 X は漸近的に $N(np, np(1-p))$ に従
う. $n=1000$, $p=0.25$ なら $N(250, 187.5)$.

[7.4] 各カウントは $po(\lambda)$ に従うから, その和は $po(n\lambda)$. $\mu=\lambda$, $\sigma^2=\lambda$ として漸近的
に $N(n\lambda, n\lambda)$ に従う. $n=20$, $\lambda=5$ なら $N(100, 100)$.

[7.5] 分布は中心極限定理から, $N(\bullet)$. 区間 $(0.99, 1.01)$ の確率は $\bullet$.

[8.1] (i) ブラウン運動のある区間における2次変分は区間長に二次平均収束する.
よって 10.

(ii) 同, 5.

[8.2] (i) 3次正規分布で, 平均ベクトル $=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 分散共分散行列 $=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $\sqrt{1/3}=0.577$, $\sqrt{1/2}=0.707$, $\sqrt{2/3}=0.816$

[8.3] $E(X_{n+1}X_n\cdots X_1|X_n\cdots X_1, X_{n-1}, X_n\cdots X_1, \dots, X_1)=X_n\cdots X_1 E(X_{n+1})=X_n\cdots X_1$

[8.4] (i) 定義通りで, 各増分の正規性は $N(3(t_{i+1}-t_i), 4(t_{i+1}-t_i))$. $Cov(V(s), V(t))$
 $=4\min(s, t)=4s$

(ii) $V(1)$ は $N(3, 4)$, $V(2)$ は $N(6, 8)$ に従い, 相関係数 $\rho=\sqrt{1/2}$ より

平均 $=[\sqrt{1/2}\cdot(\sqrt{8}/\sqrt{4})(x-3)]+6=x+3$, 分散 $=8(1-(\sqrt{1/2})^2)=4$ の
正規分布.

[8.5] 問題の表現 $\Rightarrow m=6$, $n=4$ を $n=4$, $m=6$ と言い換え

期待値(平均) $=6/(4+6)=0.6$

分散 $=4\cdot 6(4+6+1)/(4+6)^2=24/(11\cdot 100)=0.022$

モード(最頻値) $=(6-1)/(6+4-2)=5/8=0.625$

メディアン(中央値) $=0.607$ (EXCEL の BETA.INV による)

*モードまではテキスト, 平均は常識範囲内.

[9.1] (i) §9.8 で, $\gamma=1$, $\sigma=1$ のケース, (ii) は $(9, 5, 11)$ の記号で $A(t)\equiv 0$, $B(t)$
 $=1/(1+t)$, $g(t, x)=x/(1+t)$ とおくと $\partial g/\partial t=-x/(1+t)^2=-(g(t, x))/(1+t)$

(ii) 正確を期するため, 記号を変えて $X(t)\equiv B(t)$, $A(t)\equiv 0$, $B(t)\equiv 1$ とおく.
ここで $Y(t)=(X(t))/(1+t)$ に対し, $g(t, x)=x/(1+t)$ として伊藤の定理か
ら $\partial g/\partial t=-x/(1+t)^2$, $\partial g/\partial x=1/(1+t)$ よって以下で題意の解となる.
 $dY(t)=-X(t)/(1+t)^2dt+dW(t)/(1+t)=-Y(t)/(1+t)dt+dW(t)/(1+t)$

[9.2] 一般に $0<s<t<T$ として, 共分散 $=E\left((T-s)=\int_0^s \frac{W(u)}{1-u}du\cdot(T-t)\int_0^t \frac{W(x)}{1-u}du\right)$
 $=(T-s)(T-t)=\int_0^s \frac{du}{(1-u)^2}=(T-t)\frac{s}{T}=s\left(1-\frac{t}{T}\right)$, 分散 $=t\left(1-\frac{t}{T}\right)$

[9.3] 尤度比になり, $dQ/dP=(\sigma_1/\sigma_2)\exp[-1/2\{(x-\mu_2)^2/\sigma_2^2+(x-\mu_1)^2/\sigma_1^2\}]$, 以下
略

[9.4] $e^{-at}=0.1$ より, $t=t_{1.9}=-\log 0.1/a=2.303/0.1=23.03$

分数は $V(v(t_{1.9}))=(1.5)^2/(2\cdot(0.1))(1-(0.1)^2)=11.375D(v(t_{1.9}))=3.372$

[9.5] $\begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -W_3(t) & -2W_2(t) & -W_1(t) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ dW_3(t) \end{pmatrix}$

[10.1] 1. $F(S(T))=\max(52-50, 0)=\max(2, 0)=2\therefore$ ペイオフ=2ドル

2. $F(S(T))=\max(48-50, 0)=\max(-2, 0)=0\therefore$ ペイオフ=0ドル

3. $F(S(T))=\max(40-50, 0)=\max(-10, 0)=0\therefore$ ペイオフ=0ドル

[10.2] 略

[10.3] 略

[10.4] $y(0,2) = -1/2 \ln(0.9540) = -1/2 \times (-0.0470) = 0.0235$

[10.5] (1) $d_1 = (-0.080 + 0.030625) / (0.25 \times \sqrt{0.5}) = -0.049375 / 0.17678 \approx -0.2793$
 $\therefore \Delta \approx 0.389$

(2) $\Gamma = 0.389 / (120 \times 0.25 \times \sqrt{0.5}) \approx 0.0183$

[11.1] (i) 初期資産総額 $V_0=2$ より, 時点 $n=4$ における債務超過 $\{V_4 < 1\}$ は 3 個の
排反事象 $\{V_4 = -2\} = \{X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = -1\}$, $\{V_4 = -1\} = \{X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
 $= -3\}$, $\{V_4 = 0\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ の } 1 \text{ 個が } +1 \text{ で他の } 3 \text{ 個は } -1\}$ の合併で確
率は, それぞれつぎ. $(0.4)^4 = 0.0256$, 0 , $4C_3 \times 0.6 \times (0.4)^3 = 0.1536$, よっ
て, $P(V_4 < 1) = 0.1792$.

(ii) 2 個の排反事象 $\{X_1 = +1, X_2 = -1, X_3 = -1, X_4 = -1\}$, $\{X_1 = -1, X_2 = +1,$
 $X_3 = -1, X_4 = -1\}$, 和の確率は和に等しい. これらの事象の確率は, 0.6
 $\times (0.4)^3 + 0.6 \times (0.4)^3 = 0.0768$ である.

(iii) 最初の債務超過が起こる時点 τ で表わすと, 求める確率は $P(\tau \leq 4) = P$
 $(\tau = 0) + P(\tau = 1) + P(\tau = 2) + P(\tau = 3) + P(\tau = 4)$ で, $\{\tau = 0\} = \{V_0 < 1\}$, $\{\tau =$
 $1\} = \{X_1 < -1\}$, $\{\tau = 2\} = \{X_1 \geq -1, X_1 + X_2 < -1\} = \{X_1 = -1, X_2 = -1\}$ さ
らに $\{\tau = 3\} = \{X_1 \geq -1, X_1 + X_2 \geq -1, X_1 + X_2 + X_3 < -1\} \subset \{X_1, X_2, X_3 \text{ の } 2 \text{ 個か$
 $\text{は } +1 \text{ でも } -1 \text{ でもない}\}$ より, それぞれの確率は $P(\tau = 0) = 0$, $P(\tau = 1) =$
 0 , $P(\tau = 2) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$, $P(\tau = 3) = 0$. さらに, (i)(ii) より, $P(\tau =$
 $4) = 0.03072$ よって, 求める確率は $P(\tau \leq 4) = 0 + 0 + 0.16 + 0.0768 = 0.2368$.

[11.2] (略解) 第 6 節において (11.6.7) 式から

$$P(\tau_\alpha \leq t) = 2/\sqrt{2\pi t} \int_{-\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2t} dx$$

$\alpha = D - V_0 = -1$ および $t = 1$ を代入して求める確率は

$$P(\tau_\alpha \leq t) = 2/\sqrt{2\pi} \int_1^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 2 \times (1 - 0.8413) = 0.3174.$$

[11.3] (略解) 最初のデフォルト発生の時点 τ の確率分布は $P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ と
表される (11.7 節を参照). $\lambda = 0.5$, $t = 2$ から求める確率は $1 - e^{-1} \approx 0.632121$ で
ある.

[11.4] (略解) (11.7.4) 式から, $\hat{P}(\tau \leq 1) = 1 - e^{0.01 \times 1} \times 0.98 \approx 0.01015$, デフォルト確率
はおよそ 1.02%, と推定される. デフォルト強度は (11.7.5) 式から $\hat{\lambda} = -$
 $(\log 0.98) / 1 - 0.01 \approx 0.01020$ となる.

[11.5] 略