

5.1 <一様分布> いくつかの一様分布に対して、次の計算を行え.

- i) $[0, 6]$ 上の一様分布の密度関数, 期待値, 分散
- ii) 同じく, チェビシェフの不等式の成立
- iii) $[0, 1]$ 上の一様分布の歪度, 尖度

5.2 <期待値の実地例> 5.2 節の宝くじの期待値を求めよ.

5.3 <聖ペテルスブルグの逆説> コインを繰り返し投げ, はじめて表が出たときに止める. それが n 回目であるとき, 2^n 円を得るものとする.

- i) 得られる額 X の確率分布を求めよ.
- ii) $E(X)$ は存在しない (∞ である) ことを示せ.

(注) ii) の結果が直観に反するので「逆説」paradox といわれる. この逆説は, ダニエル・ベルヌーイによって, 貨幣額に対数変換を考えることにより解決された.

5.4 <最小平均二乗> $E(X-a)^2$ を最小にする a およびその最小値を求めよ.

5.5 正 n 面体で $1, 2, \dots, n$ の乱数を発生させるとする. この乱数の期待値, 分散を求めよ. ただし, 正 n 面体とは, 正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の五種類の立体のことである.

5.6 <一様分布の平方変換> 確率変数 X が $[0, 1]$ 上の一様分布に従うとき, X^2 の累積分布関数, 密度関数, 期待値, 分散を求めよ.

5.7 <正規分布の平方変換> 確率変数 X が, (5.48) で $\mu=0$, $\sigma=1$ の正規分布に従うとき, X^2 の累積分布関数, 密度関数, 期待値, 分散を求めよ.

5.8 累積分布関数は $F(x)=P(X \leq x)$ で定義されるが, $G(x)=P(X < x)$ と定義した場合 $F(x)$ とどこが異なるか. 二項分布の例で示せ.