多次元の伊藤の公式

確率変数を2個以上含む現象を確率積分で扱うためには，伊藤の公式を一般の n 次元に拡張しなければならない．この場合はブラウン運動を m 次元で考える．

n 次元の伊藤過程で m 次元ブラウン運動は，$(W_1(t), W_2(t), \cdots, W_m(t))$ として

$$\begin{cases} dX_1 = u_1 dt + v_{11} dW_1 + \cdots + v_{1m} dW_m \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ dX_n = u_n dt + v_{n1} dW_1 + \cdots + v_{nm} dW_m \end{cases}$$

と表される確率過程をいう．ベクトル，行列では

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{u}dt + \boldsymbol{v}d\boldsymbol{W}(t),$$

ここで

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_{11} \cdots v_{1m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ v_{n1} \cdots v_{nm} \end{pmatrix},\ \ d\boldsymbol{W}(t) = \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ \vdots \\ dW_m(t) \end{pmatrix}$$

である．

もし $(t, \boldsymbol{x})$ の $(n+1)$ 次元空間で定義された p 次元の値をもつ関数

$$g(t, \boldsymbol{x}) = (g_1(t, \boldsymbol{x}), \cdots g_p(t, \boldsymbol{x}))$$

を用いて，新しい確率過程

$$\boldsymbol{Y}(t) = g(t, \boldsymbol{X}(t))$$

を定義すると，$\boldsymbol{Y}(t)$ も伊藤過程で

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, \boldsymbol{X})dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, \boldsymbol{X})dX_i$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, \boldsymbol{X})dX_i dX_j \quad (k = 1, 2, \cdots, p)$$

が成り立つ．ここで，次のルールが規約される．

$$dW_i dW_j = \delta_{ij} dt,\ \ dW_i dt = dt dW_i = 0$$

なお，δ_{ij} は $i \neq j$ なら 0，$i = j$ なら 1 と規約する．

$P \succ Q$　‘不可能’から‘可能’が生じてはならない：

2つの確率分布 P, Q があり，すべての A につき

$$P(A)=0 \text{ なら } Q(A)=0$$

いいかえれば

$$P(A)=1 \text{ なら } Q(A)=1 \quad \text{（確実性）}$$

となるとき，P は Q を「支配する」「優越する」，あるいは Q は P について（順序に注意）「絶対連続」といい

$$P \succ Q$$

と記す*.

＊実関数論では≫も使用（Royden）．実関数論では確率（分布）を「確率測度」という（第1,2章）．

要するに，（不）確実性について Q は P から決まる，ということである．

例　P, Q を正規分布（何でもよい）とすると，$P \succ Q$．厳密な証明はこの時点ではむずかしいが，A を区間 $[a, b]$ の形あるいはその和集合に限るならどのような確率分布に対してもその確率 $\neq 0$ である．

例　P を指数分布，Q を正規分布とするとき，$P \succ Q$ ではない．実際，$A=[-1, 0]$ とするとき $P(A)=0$ であるが $Q(A)>0$ となる．

例　P を二項分布，Q をポアソン分布とするとき，$P \succ Q$ ではない．二項分布は n より大きい整数 x については $P(x)=0$ であるが，ポアソン分布では $Q(x)>0$ となる．

これに続き，次が重要である．

$P \sim Q$　2つの確率分布 P, Q があり，

$$P \succ Q \quad \text{かつ} \quad Q \succ P$$

の両方が成り立つとき

$$P \sim Q$$

とあらわして，P と Q はたがいに絶対連続あるいは「同値」という．

どのような正規分布もたがいに同値である
どのようなポアソン分布もたがいに同値.
n が共通な二項分布はたがいに同値.

したがって，2つの確率分布 P, Q の同値関係とは，「確実性」が共有されること，

一方で確実なら他方でも確実，一方で不確実なら他方でも不確実，ということである．すなわち，評価の方法を変更すること自体は許される.

測度変換と無裁定の仮定　ギルザノフの定理の説明として，正規分布 $N(0,1)$ に従う n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ のケースに拡げ，さらに同様に

$$Y_1 = X_1 + u_1, \quad Y_2 = X_2 + u_2, \quad \cdots, \quad Y_n = X_n + u_n$$

を定義し，これらが

$$E(Y_1) = E(Y_2) = \cdots = E(Y_u) = 0$$

になるように，$N(0,1)$ に対し各 $-u_1, -u_2, \cdots -u_n$ だけのずれを与える．

それぞれに対し，式（9.11.4）を用いると

$$\frac{f_{-u_i}(x_i)}{f_0(x_i)} = e^{-u_i x_i - \frac{1}{2} u_i^2} \tag{9.11.5}$$

となるから，この場合の $P \to Q$ の測度変換は，確率の変化

$$e^{-(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n) - \frac{1}{2} - (u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots + u_n{}^2)} \tag{9.11.6}$$

を引き起こす．ずらした後の測度 Q のもとでは

$$Y_1, \quad Y_1 + Y_2, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3, \quad \cdots, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n$$

は，式（6.3.6）からマルチンゲールになっていることに注目しよう．平均は 0 になって消えているからである．

実際，もとの測度 P のもとでは

$$X_1 + u_1, \quad X_1 + X_2 + u_1 + u_2, \quad X_1 + X_2 + X_3 + u_1 + u_2 + u_3, \quad \cdots,$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

は，$u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, \cdots, u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ というドリフト項があったが，$P \to Q$ の変換で消失したのである．このように，式（2.3.6）でもわかるように，同じ確率変数（の記号）も測度が異なると，期待値などの諸量が異なってくるのである．

そこで，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はブラウン運動 $W(t)$ の等間隔な増分にとり，$n \to \infty$ のとき，間隔幅→0 になるようにすると

$$\sum_{i=1}^{n} u_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

は

$$\int_0^s u(t)\,dW(t), \quad \int_0^s (u(t))^2 dt \tag{9.11.7}$$

に近づく．このような考え方から，ギルサノフの定理が得られる．

この意義を述べておこう．株式の投資戦略の優劣評価においては，市場自体にコスト 0 で誰にでも確実に（リスク・フリーで）儲けられる要因があってはならない．不正はもちろん一時的に儲けられるような不均衡（アンバランス）の機会のない理想的で公正な状況を扱う．裁定の定義は§10.7 に与えるが，とにかくも価格（後にいう相対価格）の変動が平均 0 であることは重要である．これが「無裁定」の仮定の１つの言い方であり，マルチンゲールはその重要な成立ケースである．式（6.3.7）など参照．